ЧОУ ВПО «Институт экономики, управления и права (г. Казань)»

Экономический факультет

Кафедра «Финансы и кредит»

Галиахметова А.М., Еникеева З.А.

Методическое пособие

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ВЫПУСКНЫХ КВАЛИФИКАЦИОННЫХ (БАКАЛАВРСКИХ) РАБОТАХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ «ЭКОНОМИКА» ПРОФИЛЮ «ФИНАНСЫ И КРЕДИТ»

Казань – 2014

УДК 330.4:519.2(075.8)
ББК 65в631я73
Г 15

Печатается по решению Секции экономических дисциплин
Учебно-методического совета
Института экономики, управления и права (г. Казань)

Галиахметова, А.М.

Применение экономико-математических методов в выпускных квалификационных (бакалаврских) работах по направлению подготовки «Экономика» профилю «Финансы и кредит»: метод. пособие / А.М. Галиахметова, З.А. Еникеева – Казань: Изд-во «Познание» Института экономики, управления и права (г. Казань), 2014. – 47 с.

Обсуждено и одобрено на заседании кафедры «Финансы и кредит».

В настоящем методическом пособии представлены теоретические аспекты экономико-статических и экономико-математических методов в управлении финансовыми отношениями в современных условиях экономики. Содержание пособия дает студентам возможность получить представление о возможностях экономико-математического и статистического моделирования для оценки эффективности управления финансовыми отношениями на микро- и макроуровне.

Содержание методического пособия соответствует направлению подготовки «Экономика» профиля «Финансы и кредит».

Методического пособие предназначено для студентов бакалавриата и магистратуры, аспирантов и преподавателей экономических вузов, научных и практических работников, специализирующихся в области финансов.

УДК 330.4:519.2(075.8)
ББК 65в631я73

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В современных условиях развития экономики для описания характера изменения финансовых показателей на макро- и микроуровне рекомендуется применять различные экономико-математические, экономико-статистические, расчетно-конструктивные и ряд других методов.

При помощи различных методов научного исследования в экономике можно оценить эффективность управления централизованными и децентрализованными денежными отношениями, уровень финансовых рисков в хозяйствующих субъектах, размер аннуитетных платежей при формировании резервного капитала корпорации, уровень и характер тесноты связи между факторами производства и результатами производственно-финансовой деятельности.

Особый интерес представляют построение трендовых и многофакторных корреляционно-регрессионных моделей, способствующие построению оптимистичных прогнозных показателей на среднесрочную перспективу.

Изучение различных методов будут способствовать реализации следующих учебных задач:

- формировать прикладные компетенции, позволяющих составить экономико-математическую модель регрессии;
- обучить алгоритму построения трендовых моделей;
- формировать навыки построения оптимистичных прогнозных показателей на основе трендовых и многофакторных регрессионных моделей;
- подготовить к принятию эффективных организационно-управленческих решений финансового характера; владение способами и средствами получения, хранения, переработки и применения статистической информации.

Применение различных методов научного исследования при написании выпускной квалификационной работы по направлению подготовки «Экономика» опирается на знания и навыки, приобретенные студентами в результате изучения таких дисциплин профессионального цикла, как «Финансы», «Статистика», «Эконометрика», «Корпоративные финансы», «Финансы», «Финансовая математика».

Учитывая формирование общекультурных и профессиональных компетенций в результате изучения цикла дисциплин по направлению подготовки «Экономика», отметим, что наиболее существенными и значимыми являются способность выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организациях стандартами; способность на основе описания экономических процессов и явлений строить эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.

В результате изучения данного методического пособия формируются следующие знания, умения и навыки:

- знает экономико-статистические и экономико-математические методы при анализе финансовых отношений на микро- и макроуровне;
- знает интерфейс MS Excel при решении задач по оптимизации финансовых отношений, возникающих у субъектов хозяйствования на микро- и макроуровне;
- умеет рассчитать показатели, характеризующие уровень эффективности управления финансовыми отношениями;
- умеет интерпретировать результаты расчетов экономических и финансовых показателей;
- способен выбрать некоторые инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей;
- обладает навыками построения линейных моделей регрессии на основе описания экономических процессов и явлений, анализа и интерпретации полученных результатов;
- обладает навыками использования для решения аналитических и исследовательских задач современных технических средств и информационных технологий.

Раздел I. "Экономико-статистические методы в оценке эффективности финансовых отношений на макро-и микроуровне и прогнозировании показателей"

1.1. Показатели вариации в оценке финансовых рисков

Обобщение множества научных трудов, посвященных антикризисному управлению, позволило авторам прийти к следующему определяющему понятию. Под риском можно понимать любое отклонение показателей от их нормального значения как в большую, так и в меньшую сторону. С другой стороны, риск – это характеристика ситуации, имеющей неопределённость исхода, при обязательном наличии неблагоприятных последствий; риск – это количественная оценка опасностей, определяется как частота одного события при наступлении другого; риск - это неопределённое событие или условие, которое в случае возникновения имеет позитивное или негативное воздействие на репутацию компании, приводит к приобретениям или потерям в денежном выражении; риск - это шанс неблагоприятного исхода, опасность, угроза потерь или повреждений, возможность осуществления некоторого нежелательного события [42].

При анализе управления портфелем ценных бумаг требуется оценить и сравнить уровень финансовых рисков с помощью СКО (среднеквадратического отклонения) его доходности т.е. σ_p:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} P_i (K_{pi} - \hat{K}_p)^2} \qquad (1)$$

где K_{pi} – доходность портфеля в i-м состоянии экономики;

$\hat{K}_p$ - ожидаемая (средняя) доходность портфеля;

P_i – вероятность наступления i-го состояния.

$$\hat{K}_p = \sum_{i=1}^{n} K_{pi} \cdot P_i \qquad (2)$$

$$V = \frac{\sigma}{\hat{K}_p} \qquad (3)$$

где V – коэффициент вариации.

Пример. По двум корпорациям имеются исходные данные по двум портфелям ценных бумаг.

Таблица 1

Вероятность события, %	Доходность, %	
	А	Б
0,1	-10	8

0,2	36	6
0,3	40	7
0,4	-5	3

Оценим и сравним уровень финансовых рисков.

Решение:

1. Рассчитаем ожидаемую доходность каждого портфеля:

$$\widehat{K}_{pA} = \sum_{i=1}^{n} K_{pi} \cdot P_i = -10 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}2 + 40 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot (-5) = 16{,}2\%$$

$$\widehat{K}_{pB} = \sum_{i=1}^{n} K_{pi} \cdot P_i = 8 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 = 5{,}3$$

2. Рассчитаем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_{pA} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} P_i (K_{pi} - \hat{K}_p)^2 = 0{,}1 \cdot (-10 - 16{,}2)^2 + 0{,}2 \cdot (36 - 16{,}2)^2 + 0{,}3 \cdot (40 - 16{,}2)^2 + 0{,}4 \cdot (-5 - 16{,}2)^2} = 22{,}3\%$$

$$\sigma_{pB} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} P_i (K_{pi} - \hat{K}_p)^2 = 0{,}1 \cdot (8 - 5{,}3)^2 + 0{,}2 \cdot (6 - 5{,}3)^2 + 0{,}3 \cdot (7 - 5{,}3)^2 + 0{,}4 \cdot (3 - 5{,}3)^2} = 2{,}0\%$$

3. Рассчитаем коэффициент вариации:

$$V_A = \frac{\sigma}{\widehat{K}_p} = \frac{22{,}3}{16{,}2} = 1{,}38$$

$$V_Б = \frac{\sigma}{\widehat{K}_p} = \frac{2{,}0}{5{,}3} = 0{,}38$$

4. Оценим, во сколько раз уровень финансовых рисков одного портфеля превосходит уровня рисков другого портфеля:

$$n = \frac{1{,}38}{0{,}38} = 3{,}6\,.$$

Отсюда видно, что уровень финансовых рисков по портфелю «А» более, чем в 3,5 раза превосходят уровня рисков по портфелю «Б». Согласно базисной концепции финансового менеджмента большему финансовому риску соответствует большая доходность.

Уровень финансового риска также можно оценить с помощью ковариации.

Ковариация – это показатель, учитывающий как изменчивость (волатильность) доходности акции или портфелей, так и тенденцию их доходности к росту или снижению по мере того, как растет или снижается доходность других акции или портфелей (Cov (AB)):

$$Cov(AB) = \sum_{i=1}^{n} (K_{Ai} - \hat{K}_A)(K_{Bi} - \hat{K}_B) \cdot P_i \qquad (4)$$

Первый член в скобках после знака суммы – это отклонение доходности акции (портфеля) А в i-м состоянии экономики от ее среднего значения;

второй член – это отклонение доходности B при тех же условиях; P_i – вероятность наступления i-го состояния.

Таким образом, Cov(AB) будет большим и положительным, если два актива имеют больше СКО доходностей и склонны изменяться сонаправленно; оно будет большим и отрицательным для активов, со значительными и противонаправленными колебаниями; оно будет небольшим, если доходности активов изменяются случайным образом или если любой из активов имеет малое СКО.

Так, для измерения степени совместного изменения переменных чаще используется показатель – **коэффициент корреляции (τ):**

$$\tau_{AB} = \frac{Cov(AB)}{\sigma_A \cdot \sigma_B} \qquad (5).$$

Если $\tau_{AB} \to -1$ тогда говорят, что акции коррелируют отрицательно (т.е. с ростом доходности одного финансового инструмента, доходность другого финансового инструмента снижается), в противном случае, коррелируют положительно.

Причем, $-1 \le \tau_{AB} \le 1$.

Заметим, что если распределение доходностей ценных бумаг являются нормальными, то можно использовать следующее выражение для риска портфеля, состоящего из двух активов:

$$\sigma_p = \sqrt{W_A^2\sigma_A^2 + (1-W_A^2)\sigma_B^2 + 2W_A(1-W_A)\tau_{AB}\sigma_A\sigma_B} \qquad (6)$$

где W_A – доля средств портфеля, инвестированная в актив A;
$(1\text{-}W_A)$ – доля портфеля, инвестированная в B.

Особый интерес представляют эффективные портфели. **Эффективными портфелями** считаются портфели, обеспечивающие наиболее высокую среднюю доходность при любой заданной степени риска или наименьший риск при любой заданной доходности.

Пример. Пусть, $\hat{K}_A = 5\%$, σ_A= 4%, $\hat{K}_B$= 8%, σ_B= 10%. Необходимо определить множество достижимых портфелей ценных бумаг, а затем из него выделить подмножество эффективных портфелей.

Решение:

Рассмотрим три различные значения: $\tau_{AB} = +1{,}0$; $\tau_{AB} = 0$; $\tau_{AB} = -1{,}0$. Для каждого случая рассчитаем доходность $\hat{K}_p$ и СКО σ_p доходности портфеля.

$\hat{K}_p = W_A \cdot \hat{K}_A + (1-W_A) \cdot \hat{K}_B$.

Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица 2

Доля W_A актива А	Доля $1-W_A$ актива В	$\hat{K}_p$,%	σ_p,%		
			τ_{AB} = +1,0	τ_{AB} = 0	τ_{AB} = -1,0
1	0	5	4	4	4
0,75	0,25	5,75	5,5	3,9	0,5
0,5	0,5	6,5	7	5,4	3
1,25	1,75	7,25	8,5	7,6	6,5
0	1	8	10	10	10

Таким образом, во всех трех случаях ожидаемая доходность портфеля ценных бумаг возрастает линейно с 5 % до 8 % с ростом доли актива В в портфеле. В случае τ_{AB} = +1,0 все портфели оказываются эффективными, а в случае τ_{AB}=0 и τ_{AB}= -1,0 эффективной лишь будет часть достижимого множества.

1.2. Коэффициенты эластичности и корреляции как оценка характера взаимосвязи финансовых показателей

Для оценки взаимосвязи финансовых показателей рекомендуется исчислять коэффициенты эластичности и корреляции.

Коэффициент эластичности – это показатель, характеризующий меру чувствительности экономической величины (финансового показателя) по отношению к факторам (показателям), от которых она зависит. Измеряется изменением экономической величины (например, величины спроса, предложения) при изменении фактора (например, цены) на единицу. В математическом смысле коэффициент эластичности есть производная от экономической величины по фактору, от которого зависит данная величина [39].

Обозначим за факторный показатель X_i, за результативный – Y_i.

Частные коэффициенты эластичности определяются по формуле:

$$Э_{x_i} = a_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}} \qquad (7)$$

где: $\bar{x}_i$ - среднее значение соответствующего факторного признака;

$\bar{y}$ - среднее значение результативного признака;

a_i - коэффициент регрессии при соответствующем факторном признаке. Причем коэффициенты регрессии рассчитываются из построенной корреляционно-регрессионной модели. Заметим, что факторные показатели X_i находятся в линейной зависимости от результативных показателей $Y_{i.}$

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов в среднем за исследуемый период времени изменится значение результативного показателя Y при повышении соответствующего факторного показателя X_i на 1 %.

Для оценки характера тесноты связи между различными показателями рассчитывается коэффициент корреляции.

Известно, что корреляция - это статистическая взаимосвязь двух или нескольких случайных величин (либо величин, которые можно с некоторой допустимой степенью точности считать таковыми). При этом изменения значений одной или нескольких из этих величин сопутствуют систематическому изменению значений другой или других величин. Математической мерой корреляции двух случайных величин служит корреляционное отношение, либо коэффициент корреляции. В случае, если изменение одной случайной величины не ведёт к закономерному изменению другой случайной величины, но приводит к изменению другой статистической характеристики данной случайной величины, то подобная связь не считается корреляционной, хотя и является статистической [40].

Степень корреляции измеряется коэффициентом корреляции *r*, который меняется от +1 до –1, достигая значения +1, когда X и Y полностью положительно коррелируются между собой, и –1, когда X и Y полностью отрицательно коррелируются между собой; если $r = 0$, X и Y являются независимыми переменными. *r* не зависит от единиц измерения X и Y.

При поиске корреляционной зависимости обычно выявляется вероятная связь одной измеренной величины X (для какого-то ограниченного диапазона ее изменения, например от X_1 до X_n) с другой измеренной величиной Y (также изменяющейся в каком-то интервале Y_1... Y_n). В таком случае мы будем иметь дело с двумя числовыми последовательностями, между которыми и надлежит установить наличие статистической (корреляционной) связи. На этом этапе пока не ставится задача определить, является ли одна из этих случайных величин функцией, а другая - аргументом. Отыскание количественной зависимости между ними в форме конкретного аналитического выражения - это задача уже другого анализа, регрессионного. Статистический смысл термина значимость означает, что анализируемая зависимость проявляется сильнее, чем это можно было бы ожидать от чистой случайности [38].

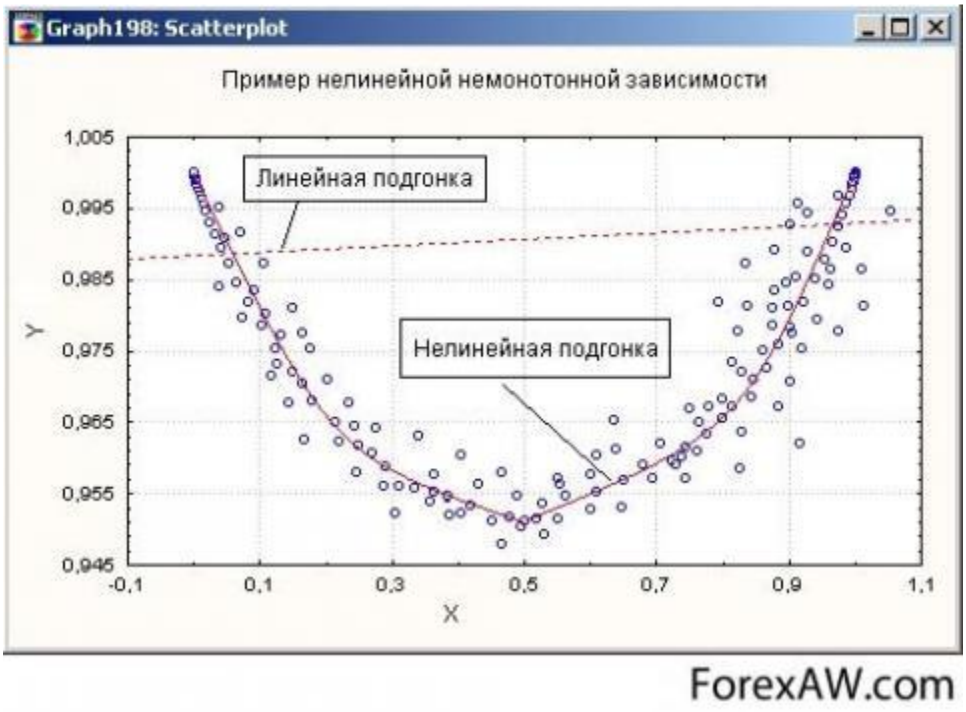


Рис.1. Исследование характера взаимосвязи показателей X и Y

Иногда приходится анализировать взаимовлияние различных макроэкономических факторов, в таком случае, всегда есть возможность изучать каждое измерение по отдельности - как часть одномерной совокупности данных. Однако реальную отдачу можно получить лишь при совместном изучении обоих параметров. Основное назначение такого подхода - возможность выявления взаимосвязи между параметрами.

Следовательно, помимо традиционных измерений и последующих вычислений при анализе статистических данных приходится решать проблему и более высокого уровня - выявление функциональной зависимости между воздействующим фактором и регистрируемой (изучаемой) величиной.

Рис. 2. Пример линейной регрессии

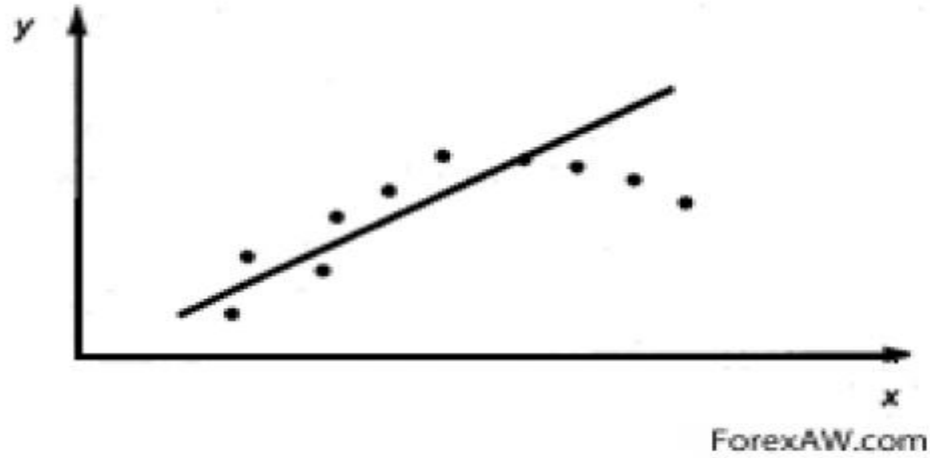


Рис. 3. Пример нелинейной регрессии

Виды корреляционной связи между показателями могут быть различны: так корреляция бывает линейной и нелинейной, положительной и отрицательной. Она линейна, если с увеличением или уменьшением одной переменной, вторая переменная также растёт, либо убывает. Она нелинейна, если при увеличении одной величины характер изменения второй нелинеен, а описывается другими законами (полиномиальная, гиперболическая).

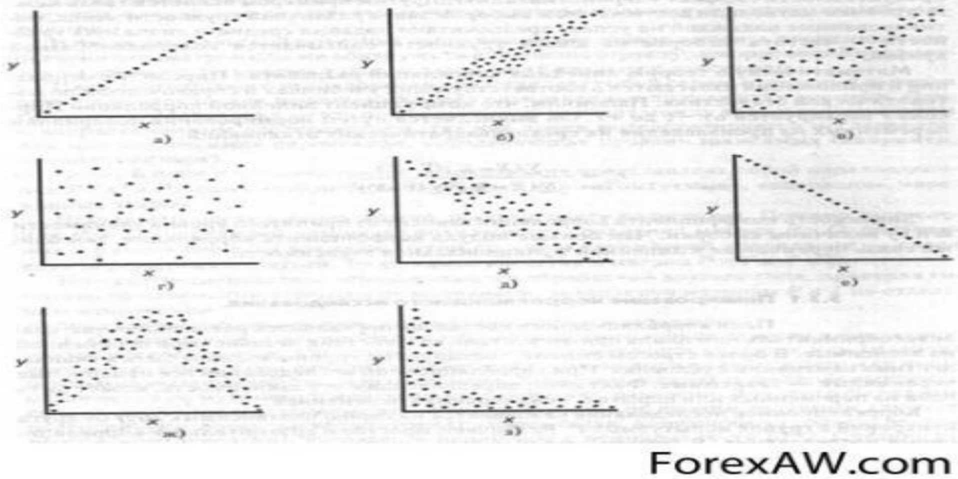


Рис. 4. Графики видов корреляции

Из рисунка видно, что а) строгая положительная корреляция, б) сильная положительная корреляция, в) слабая положительная корреляция, г) нулевая корреляция, д) отрицательная корреляция, е) строгая отрицательная корреляция, ж) нелинейная корреляция, з) нелинейная корреляция.

Теснота связи при линейной зависимости показателей измеряется с помощью линейного коэффициента корреляции.

Производя расчет по итоговым значениям исходных переменных линейный коэффициент корреляции можно вычислить по формуле:

$$r_{xy} = \frac{n \cdot \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{\left[n \cdot \sum x^2 - (\sum x)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum y^2 - (\sum y)^2\right]}} \qquad (8)$$

Линейный коэффициент корреляции изменяется в пределах от -1 до 1. При этом интерпретация выходных значений коэффициента корреляции можно представить в следующей таблице.

Таблица 3

Оценка линейного коэффициента корреляции

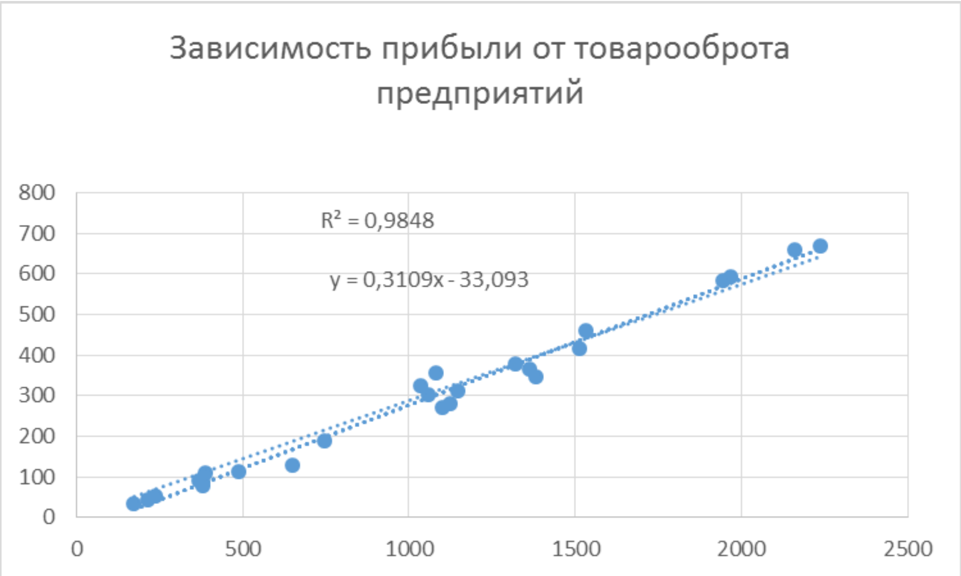
Значение коэффициента связи	Характер связи	Интерпретация связи
$r = 0$	Отсутствует	Отсутствует
$0 < r < 1$	Прямая	С ростом факторного показателя результативный показатель растет
$-1 < r < 0$	Обратная	С ростом факторного показателя результативный показатель снижается
$r = 1$	Функциональная	Факторный и результативный показатели изменяются в одинаковой последовательности

Квадрат коэффициента корреляции представляет собой коэффициент детерминации.

Пример. На основании исходных данных определить основные характеристики взаимосвязи прибыли и объема товарооборота и сформулировать выводы.

№ п/п	**Объем товарооборота, млн.руб., X**	**Прибыль, млн.руб., Y**
1	1319	378
2	1512	416
3	1080	356
4	1534	460
5	1382	346
6	367	92
7	173	35
8	378	86
9	216	43
10	238	54

№ п/п	Объем товарооборота, млн.руб., X	Прибыль, млн.руб., Y
11	1966	594
12	2160	659
13	1058	302
14	1102	270
15	1123	281
16	2236	670
17	648	130
18	378	78
19	1944	583
20	1037	324
21	1145	313
22	389	108
23	486	114
24	1361	367
25	745	189



Для оценки коэффициента регрессии нами в среде MS Excel были осуществлены следующие операции:

1. Заполняем ячейки показателями X и У.

2. Выделяем столбцы ячеек, далее вызываем контекстное меню (правой кнопкой мыши) выбираем команду **Добавить линию тренда.**
3. В открывшемся окне выбираем **Линейная** и **Показывать коэффициент детерминации на диаграмме.**

$$Э_ч = 0{,}31 \cdot \frac{1039{,}88}{289{,}92} = 1{,}112\,.$$

Данный коэффициент показывает, что при увеличении объема товарооборота в среднем по 25 предприятиям на 1 % величина прибыли увеличится на 1,112 %.

$$r_{xy} = \frac{25 \cdot 10499033 - 25997 \cdot 7248}{\sqrt{\left[25 \cdot 36567877 - 25997^2\right] \cdot \left[25 \cdot 3035812 - 7248^2\right]}} \approx 0{,}99.$$

Так как r_{xy} приближается к 1,00, тогда с увеличением объема товарооборота увеличивается величина суммарной прибыли, то есть связь между ними функциональная и каждому значению факторного признака строго соответствует одно значение результативного. При этом коэффициент детерминации $D = r_{xy}{}^2 = 0{,}99.$

Коэффициент детерминации для модели с константой принимает значения от 0 до 1. Чем ближе значение коэффициента к 1, тем сильнее зависимость. При оценке регрессионных моделей это интерпретируется как соответствие модели данным. Для приемлемых моделей предполагается, что коэффициент детерминации должен быть хотя бы не меньше 50 % (в этом случае коэффициент множественной корреляции превышает по модулю 70 %). Модели с коэффициентом детерминации выше 80 % можно признать достаточно хорошими (коэффициент корреляции превышает 90 %). Значение коэффициента детерминации, равное 1 означает функциональную зависимость между переменными.

Таким образом, коэффициенты эластичности и корреляции позволяют выявить и оценить уровень и характер тесноты связи между различными финансовыми показателями. Они могут быть использованы при описании трендовых моделей и моделей множественной регрессии.

1.3. Трендовые модели динамики финансовых показателей

Статистические наблюдения в социально-экономических исследованиях обычно проводятся регулярно через равные отрезки времени и представляются в виде временных рядов x_t, где t = 1, 2, ..., n. В качестве инструмента статистического прогнозирования временных рядов служат трендовые регрессионные модели, параметры которых оцениваются по имеющейся статистической базе, а затем основные тенденции (тренды) экстраполируются на заданный интервал времени.

Методология статистического прогнозирования предполагает построение и испытание многих моделей для каждого временного ряда, их сравнение на основе статистических критериев и отбор наилучших из них для прогнозирования.

При моделировании сезонных явлений в статистических исследованиях различают два типа колебаний: мультипликативные и аддитивные. В мультипликативном случае размах сезонных колебаний изменяется во времени пропорционально уровню тренда и отражается в статистической модели множителем. При аддитивной сезонности предполагается, что амплитуда сезонных отклонений постоянна и не зависит от уровня тренда, а сами колебания представлены в модели слагаемым.

Основой большинства методов прогнозирования является экстраполяция, связанная с распространением закономерностей, связей и соотношений, действующих в изучаемом периоде, за его пределы, или — в более широком смысле слова — это получение представлений о будущем на основе информации, относящейся к прошлому и настоящему.

Наиболее известны и широко применяются трендовые и адаптивные методы прогнозирования. Среди последних можно выделить такие, как методы авторегрессии, скользящего среднего (Бокса — Дженкинса и адаптивной фильтрации), методы экспоненциального сглаживания (Хольта, Брауна и экспоненциальной средней) и др.

Для оценки качества исследуемой модели прогноза используют несколько статистических критериев [39].

К примеру, t-критерий Стьюдента используется для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и коэффициента корреляции.

В качестве основной гипотезы выдвигают гипотезу H0 о незначимом отличии от нуля параметра регрессии или коэффициента корреляции. Альтернативной гипотезой, при этом является гипотеза обратная, т.е. о неравенстве нулю параметра или коэффициента корреляции.

Найденное по данным наблюдений значение t-критерия (его еще называют наблюдаемым или фактическим) сравнивается с табличным (критическим) значением, определяемым по таблицам распределения Стьюдента (которые обычно приводятся в конце учебников и практикумов по статистике или эконометрике).

Табличное значение определяется в зависимости от уровня значимости (а) и числа степеней свободы, которое в случае линейной парной регрессии равно (n-2) , n - число наблюдений.

Если фактическое значение t-критерия больше табличного (по модулю), то считают, что с вероятностью (1-а) параметр регрессии (коэффициент корреляции) значимо отличается от нуля.

Если фактическое значение t-критерия меньше табличного (по модулю), то нет оснований отвергать основную гипотезу, т.е. параметр регрессии (коэффициент корреляции) незначимо отличается от нуля при уровне значимости а.

Фактические значения t-критерия определяются по формулам:

$$t_{a_0} = |a_0| \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sigma_{ост.}}; \; t_{a_1} = |a_1| \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sigma_{ост.}} \cdot \sigma_x; \; \sigma_{ост.} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n}}.$$

Для проверки гипотезы о незначимом отличии от нуля коэффициента линейной парной корреляции используют критерий:

$$t_r = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}},$$

где r - оценка коэффициента корреляции, полученная по наблюдаемым данным.

Адекватность регрессионной модели оценим с помощью ***средней ошибки аппроксимации*** – среднее отклонение расчетных значений от фактических:

$$\overline{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - \hat{y}}{y} \right| \cdot 100\%,$$

ŷ – выровненные (теоретические) значения результативных показателей.

Допустимый предел значений $\overline{A}$ - не более 8-10%.

Наиболее распространенными видами трендовых моделей, характеризующих монотонное возрастание или убывание исследуемого явления, являются:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_t &= b_0 + b_1 t, \\
\hat{x}_t &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2, \\
\hat{x}_t &= b_0 t^{b_1}, \\
\hat{x}_t &= b_0 e^{b_1 t}, \qquad\qquad (9) \\
\hat{x}_t &= b_0 + \frac{b_1}{t}, \\
\hat{x}_t &= b_0 - b_1 e^t, \\
\hat{x}_t &= b_0 + b_1 \ln(t).
\end{aligned}$$

Трендовая модель характеризует изменение показателя во времени. Аналитически связь между ними описывается уравнениями:

- прямой $y_t = a_0 + a_1 \cdot t$;
- параболы $y_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$;
- гиперболы $y_t = a_0 + \frac{a_1}{t}$ и т.д.

К примеру, система нормальных уравнений для нахождения параметров линейной трендовой модели методом наименьших квадратов имеет следующий вид:

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum t = \sum y \\ a_0 \cdot \sum t + a_1 \cdot \sum t^2 = \sum y \cdot t \end{cases} \qquad (10)$$

где n – объем исследуемой совокупности, $\sum t = 1 + 2 + 3 + ... + n$, $\sum t^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, $\sum y \cdot t = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + ... + ny_n$.

Заметим, что коэффициент a_1 показывает средний абсолютный прирост исходных показателей за исходный период времени.

Пример. Используя трендовую модель описать изменение финансовых показателей.

Годы	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Фондоотдача, руб.	10	12	12	14	15	16	18	18	19

Методом наименьших квадратов построенная система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 9 \cdot a_0 + a_1 \cdot 45 = 134 \\ a_0 \cdot 45 + a_1 \cdot 285 = 738 \end{cases}$$

Отсюда, $a_0 = 9{,}22$, $a_1 = 1{,}13$. Отсюда, описываемая модель примет вид $y_t = 9{,}22 + 1{,}13 \cdot t$. Фондоотдача в среднем за 2005-2013 гг. возрастала на 1,13 руб.

Для прогнозирования финансовых показателей широко используются трендовые модели. Метод, использующий трендовые модели в прогнозировании, называется методом экстраполяции тренда. Это один из пассивных методов прогнозирования и называется «наивным» прогнозом, так как предполагает строгую инерционность развития, которая представляется в виде проектирования прошлых тенденций в будущее, а главное — независимость показателей развития от тех или иных факторов [40].

Используя результаты примера по построению трендовой модели прогноз фондоотдачи с 2014 по 2020 годы примет следующие значения:

$y_t = 9,22 + 1,13 \cdot 10 = 20,52$

$y_t = 9,22 + 1,13 \cdot 11 = 21,65$

$y_t = 9,22 + 1,13 \cdot 12 = 22,78$

$y_t = 9,22 + 1,13 \cdot 13 = 23,91$

$y_t = 9,22 + 1,13 \cdot 14 = 25,04$

$y_t = 9,22 + 1,13 \cdot 15 = 26,17$

$y_t = 9,22 + 1,13 \cdot 16 = 27,3$

Отсюда видно, что в 2014 году фондоотдача составила 20,52 руб., в 2015 г. – 21,65 руб., в 2016 г. – 22,78 руб., в 2017 г. – 23,91 руб., в 2018 г. – 25,04 руб., в 2019 г. – 26,17 руб., в 2020 г. – 27,3 руб.

Таким образом, трендовые модели позволяют выявить характер изменения финансовых показателе и построить оптимистичный прогноз.

1.4. Пример построения модели парной линейной регрессии с помощью надстройки *«Пакет анализа»* табличного процессора *Microsoft Excel*

Рассмотрим возможности MS Excel при построении модели парной регрессии.

Имеются данные о прибыли реализованной продукции, у.е. (y) и размерах инвестиций на 100 руб. стоимости основных производственных фондов, у.е. (x) одной из корпораций:

X	35	40	44	50	53	57	56	60	62	63
Y	29	33	32	36	38	41	44	42	46	47

Введем их в таблицу *Excel* и выберем пункт меню *«Регрессия»* надстройки *«Пакет анализа»*. Режим работы *«Регрессия»* служит для расчета параметров уравнения *линейной* регрессии и проверки его адекватности исследуемому процессу.

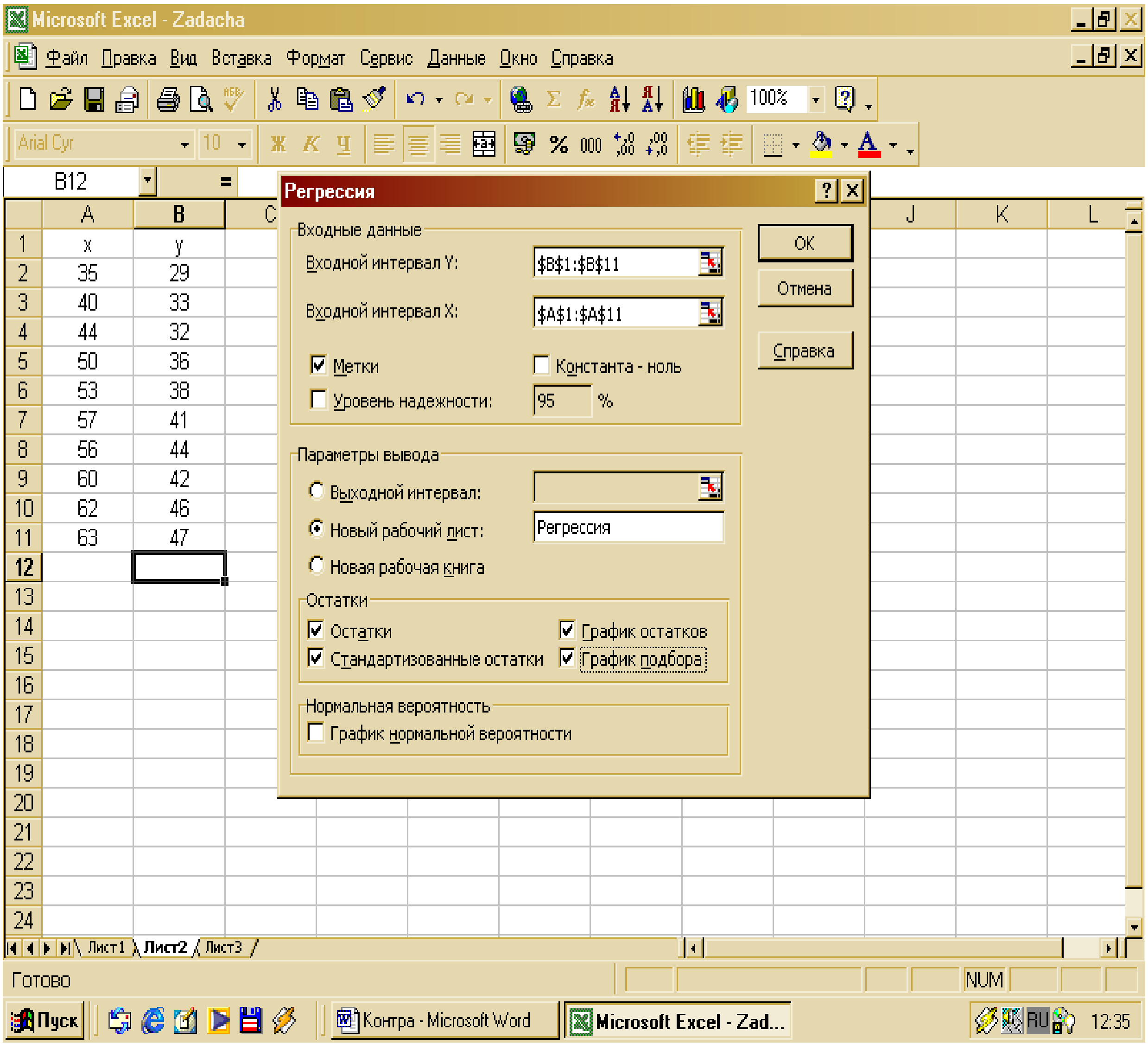


Рис. 5. Построение линейной парной регрессии с помощью пакета анализа

В диалоговом окне данного режима задаются следующие параметры:

1. *Входной интервал Y*— вводится ссылка на ячейки, содержащие данные по результативному признаку. Диапазон должен состоять из одного столбца.
2. *Входной интервал X*— вводится ссылка на ячейки, содержащие факторные признаки. Максимальное число входных диапазонов (столбцов) равно 16.
3. *Метки* — установленный флажок уведомляет о том, что в первой строке записаны названия переменных.
4. *Уровень надежности* — установите данный флажок в активное состояние, если в поле, расположенное напротив флажка, необходимо ввести уровень надежности, отличный от уровня 95%, применяемого по умолчанию. Установленный уровень надежности используется для

проверки значимости коэффициента детерминации R^2 и коэффициентов регрессии a и b. (*Примечание:* при неактивном флажке *Уровень надежности* в таблице параметров уравнения регрессии генерируются две одинаковые пары столбцов для границ доверительных интервалов).

5. *Константа-ноль* — установите данный флажок в активное состояние, если требуется, чтобы линия регрессии прошла через начало координат (т. е. $a = 0$).
6. *Выходной интервал/Новый рабочий лист/Новая рабочая книга* — впишите имя рабочего листа, куда будут записаны результаты.
7. *Остатки* - установите данный флажок в активное состояние, если требуется включить в выходной диапазон столбец остатков.
8. *Стандартизованные остатки* — установите данный флажок в активное состояние, если требуется включить в выходной диапазон столбец стандартизованных остатков.
9. *График остатков* - установите данный флажок в активное состояние, если требуется вывести график остатков.
10. *График подбора* - установите данный флажок в активное состояние, если требуется вывести график подбора.
11. *График нормальной вероятности* - установите данный флажок в активное состояние, если требуется вывести график нормальной вероятности.

Результаты регрессионного анализа и соответствующие графики приведены ниже.

Полученная регрессионная модель может быть записана следующим образом и отражает результаты автоматической обработки данных в среде MS Excel согласно рис. 6:

$$y = 6{,}457 + 0{,}622 \cdot x + \varepsilon ,$$

где ε - случайная величина, характеризующее отклонение статистического значения от теоретического значения, полученного из уравнения регрессии.

Коэффициент при x, равный 0,622 говорит, что если инвестиции увеличатся на одну у. е., то прибыль увеличится на 0,622 у. е.

Суммарной мерой качества уравнения регрессии является коэффициент детерминации. Его значение лежит между нулём и единицей:

$$0 \le R^2 \le 1 .$$

Если значение коэффициента детерминации близко к нулю, то построенное уравнение не качественно и не применимо на практике. Если значение коэффициента детерминации близко к единице, то качество уравнения подлежит дальнейшему исследованию. На рис. 6 значение коэффициента детерминации расположено в строке R-квадрат:

$$R^2 = 0{,}927.$$

Высокое значение R^2 о целесообразности дальнейшего исследования качества уравнения.

Из рисунка 6 наибольший интерес представляет анализ P-значений. Если их значения меньше заданного уровня значимости, то соответствующий коэффициент считается статистически значимым на заданном уровне. Из рис. 6 видно, что P-значения обоих коэффициентов близки к нулю, что свидетельствует об их статистической значимости.

Построенное уравнение регрессии может быть использовано, например, для прогноза. Среди статистических данных нет информации о значении прибыли, если инвестиции составят $x^* = 70$ у. е. Подставив это значение в уравнение регрессии, получим точечный прогноз:

$$y^* \approx 6{,}457 + 0{,}622 \cdot 70 \approx 49{,}997.$$

Точечный прогноз желательно дополнить интервальным. Для этого вычисляется стандартная ошибка прогноза Δy по формуле:

$$\Delta y = s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}, \qquad (11)$$

где $s = 1{,}78$ - стандартная ошибка регрессии (рис. 6), $n = 10$ - количество наблюдений, $\bar{x} =$ - среднее значение показателя x. Доверительный интервал строится по формуле:

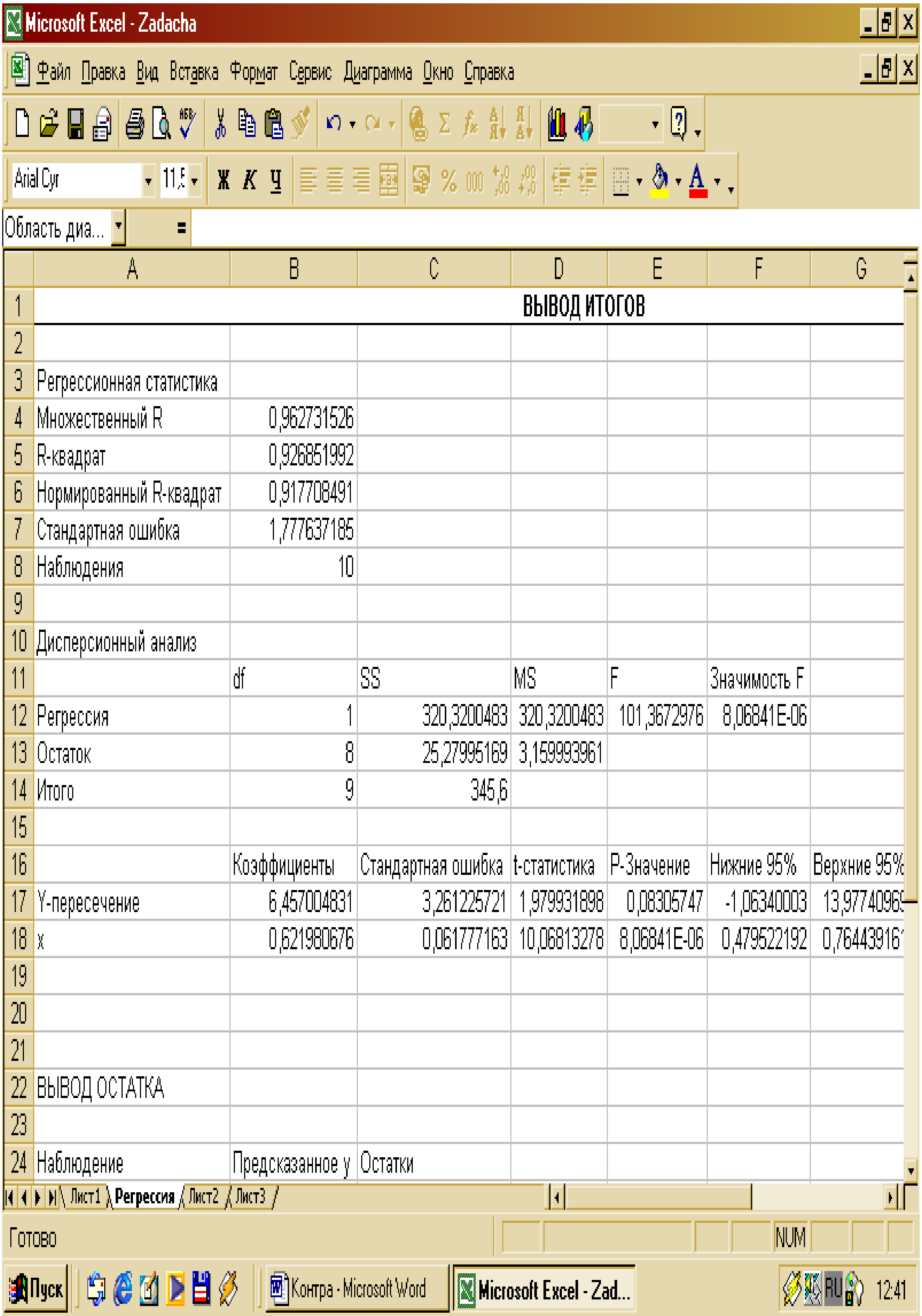
$$(y^* - t_{\alpha/2;n-2} \cdot \Delta y; y^* + t_{\alpha/2;n-2} \cdot \Delta y), \qquad (12)$$

где $t_{\alpha/2;n-2}$ - критическая точка из таблицы распределения Стьюдента. Если уровень значимости α взять равным 0,05, то $t_{\alpha/2;n-2} = t_{0{,}05/2;10-2} = t_{0{,}025;8} = 2{,}306$. Вычисленное значение Δy по формуле (11) равно 2,307. Построим доверительный интервал по формуле (12):

$$(49{,}997 - 2{,}306 \cdot 2{,}307; 49{,}997 - 2{,}306 \cdot 2{,}307) = (44{,}67; 55{,}32).$$

Таким образом, прогнозное значение показателя y^* при $x^* = 70$ лежит в интервале:

$$44{,}67 \le y^*(70) \le 55{,}32.$$



	A	B	C	D	E	F	G
1				ВЫВОД ИТОГОВ			
2							
3	Регрессионная статистика						
4	Множественный R	0,962731526					
5	R-квадрат	0,926851992					
6	Нормированный R-квадрат	0,917708491					
7	Стандартная ошибка	1,777637185					
8	Наблюдения	10					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		df	SS	MS	F	Значимость F	
12	Регрессия	1	320,3200483	320,3200483	101,3672976	8,06841E-06	
13	Остаток	8	25,27995169	3,159993961			
14	Итого	9	345,6				
15							
16		Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%
17	Y-пересечение	6,457004831	3,261225721	1,979931898	0,08305747	-1,06340003	13,9774096
18	x	0,621980676	0,061777163	10,06813278	8,06841E-06	0,479522192	0,76443916
19							
20							
21							
22	ВЫВОД ОСТАТКА						
23							
24	Наблюдение	Предсказанное y	Остатки				

Рис.6. Вывод итогов линейной парной регрессии

1.5. Примеры построения моделей нелинейной регрессии.

Пример 1. Имеются данные ежегодного потребления некоторого товара (y) и годового дохода (x) десяти семей (в у.е.):

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$У$	2	7	9	12	10	12	11	12	13	12

Необходимо:

а) Построить корреляционное поле;

б) Построить следующие варианты уравнения регрессии и выбрать наилучший:

1) линейная $y = a + bx$;

2) $y = a + b\sqrt{x}$;

3) равносторонняя гипербола $y = a + \dfrac{b}{x}$;

4) полиномы второй и третей степени $y = a + b_1 x + b_2 x^2$;

$y = a + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$;

5) степенная функция $y = a \cdot x^b$.

Решение:

а) Строим поле корреляции, используя для этого **Мастер диаграмм** в MS Excel.

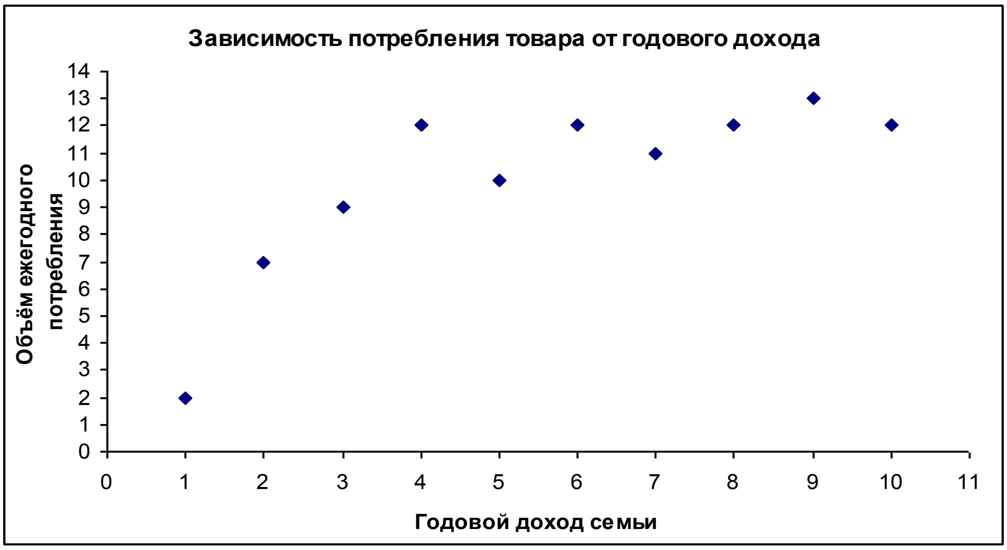


Рис.8. Корреляционное поле зависимости потребления от дохода

Анализ графика показывает, что между объёмом годового потребления товара и годовым доходом семьи наблюдается положительная нелинейная зависимость.

б) Рассмотрим различные варианты уравнения регрессии.

1) Методика построения линейного уравнения регрессии рассматривалась нами ранее. Применительно к исходным данным были получены следующие результаты: $\hat{y} = 5{,}133 + 0{,}885 \cdot x, \quad R^2 = 0{,}646$.

2) Уравнение $y = a + b\sqrt{x}$ сводится к линейному заменой $z = \sqrt{x}$.

Для построения данного уравнения с помощью пакета анализа данных **Регрессия** в MS Excel исходные данные независимой переменной преобразуются к виду $z = \sqrt{x}$:

X	$У$	$z = \sqrt{x}$
1	2	1
2	7	1,414
3	9	1,732
4	12	2
5	10	2,236
6	12	2,449
7	11	2,646
8	12	2,828
9	13	3
10	12	3,162

Оценив регрессию между *y* и *z*, получим:

$\hat{y} = 0{,}774 + 4{,}106 \cdot z, \quad R^2 = 0{,}762$.

Вернёмся к исходной переменной:

$\hat{y} = 0{,}774 + 4{,}106 \cdot \sqrt{x}, \quad R^2 = 0{,}762$.

3) Аналогично равносторонняя гипербола $y = a + \frac{b}{x}$ сводится к линейному уравнению заменой $z = \frac{1}{x}$.

Таблица преобразованных данных:

X	$У$	$z = \frac{1}{x}$
1	2	1
2	7	0,5
3	9	0,333
4	12	0,25
5	10	0,2
6	12	0,167
7	11	0,143
8	12	0,125

9	13	0,111
10	12	0,1

Оценённое уравнение: $\hat{y} = 13{,}418 - 11{,}669 \cdot z$, $R^2 = 0{,}942$.

Откуда получаем уравнение зависимости y и x:

$$\hat{y} = 13{,}418 - \frac{11{,}669}{x}, \quad R^2 = 0{,}942.$$

4) Полиномы второй и третьей степени сводятся к уравнению множественной линейной регрессии заменой $z_1 = x$, $z_2 = x^2$, $z_3 = x^3$.

Таблица преобразованных данных:

$z_1 = x$	$z_2 = x^2$	$z_3 = x^3$	y
1	1	1	2
2	4	8	7
3	9	27	9
4	16	64	12
5	25	125	10
6	36	216	12
7	49	343	11
8	64	512	12
9	81	729	13
10	100	1000	12

Результат оценки полинома второй степени:

$\hat{y} = 0{,}633 + 3{,}135 \cdot x - 0{,}205 \cdot x^2$, $R^2 = 0{,}867$.

Полином третьей степени:

$\hat{y} = -3{,}333 + 6{,}653 \cdot x - 0{,}967 \cdot x^2 + 0{,}046 \cdot x^3$, $R^2 = 0{,}933$.

5) Степенная мультипликативная функция вида $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ сводится к линейной регрессии путём логарифмирования: $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x + \ln \varepsilon$.

Преобразуем данные (используем для этого встроенную математическую функцию **LN** в MS Excel):

x	y	$\ln x$	$\ln y$
1	2	0	0,693147
2	7	0,693147	1,94591
3	9	1,098612	2,197225
4	12	1,386294	2,484907
5	10	1,609438	2,302585
6	12	1,791759	2,484907
7	11	1,94591	2,397895
8	12	2,079442	2,484907

9	13	2,197225	2,564949
10	12	2,302585	2,484907

Оценим линейную регрессию между $\ln x$ и $\ln y$:

$\ln \hat{y} = 1{,}185 + 0{,}675 \cdot \ln x,$.

Выполнив обратные преобразования, получим:

$\hat{y} = e^{1{,}185} \cdot x^{0{,}675} \Rightarrow$

$\hat{y} = 3{,}271 \cdot x^{0{,}675}, \quad R^2 = 0{,}775$.

(Для вычисления значения $e^{1{,}185}$ используйте встроенную математическую функцию **EXP**).

<u>Вывод:</u> Анализ построенных регрессий показывает, что лучше всего описывает исследуемую зависимость уравнение равносторонней гиперболы:

$$\hat{y} = 13{,}418 - \frac{11{,}669}{x}, \quad R^2 = 0{,}942,$$

так как ему соответствует самый высокий коэффициент детерминации.

Замечание: Для нахождения наиболее адекватного уравнения в MS Excel можно использовать инструмент «Подбор линии тренда» из **Мастера диаграмм**.

Пример 2. Известны данные об объёме производства *Y*, капитальных затратах *K* и затратах труда *L* некоторой страны за 12 лет:

T	*Y*	*K*	*L*
1	110	110	110
2	122	124	120
3	134	141	133
4	153	159	135
5	161	186	148
6	165	198	150
7	163	226	155
8	194	246	164
9	199	276	164
10	237	345	206
11	228	407	203
12	189	427	157

Необходимо:

а) Используя эти данные, оценить производственную функцию Кобба-Дугласа (ПФКД) $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot \varepsilon$ (где $A, \alpha, \beta -$ параметры функции, причём $A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$).

б) Дать экономическую интерпретацию α, β.

в) Спрогнозировать объём производства при затратах ресурсов $K = 400,\ L = 200$.

Решение:

а) Для оценки параметров ПФКД с помощью модели множественной линейной регрессии необходимо прологарифмировать уравнение:

$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot \varepsilon$:

$\ln Y = \ln A + \alpha \cdot \ln K + \beta \cdot \ln L + \ln \varepsilon$.

По рядам данных *Y*, *K*, *L* рассчитаем ряды их логарифмов:

t	***Y***	***K***	***L***	$\ln Y$	$\ln K$	$\ln L$
1	110	110	110	4,7005	4,7005	4,7005
2	122	124	120	4,8040	4,8203	4,7875
3	134	141	133	4,8978	4,9488	4,8903
4	153	159	135	5,0304	5,0689	4,9053
5	161	186	148	5,0814	5,2257	4,9972
6	165	198	150	5,1059	5,2883	5,0106
7	163	226	155	5,0938	5,4205	5,0434
8	194	246	164	5,2679	5,5053	5,0999
9	199	276	164	5,2933	5,6204	5,0999
10	237	345	206	5,4681	5,8435	5,3279
11	228	407	203	5,4293	6,0088	5,3132
12	189	427	157	5,2417	6,0568	5,0562

Используя пакет анализа **Регрессия**, получим оценённое уравнение регрессии:

$\ln \hat{Y} = -0{,}338 + 0{,}143 \cdot \ln K + 0{,}933 \cdot \ln L$.

Выполнив обратные преобразования, получим:

$\hat{Y} = e^{-0{,}338} \cdot K^{0{,}143} \cdot L^{0{,}933} \Rightarrow$

Таким образом, производственная функция Кобба-Дугласа:

$$\hat{Y} = 0{,}713 \cdot K^{0{,}143} \cdot L^{0{,}933}.$$

б) Оценки параметров $\alpha = 0{,}143,\ \beta = 0{,}933$ означают, что увеличение затрат капитала на 1% приводит к росту выпуска продукции на 0,143%, а увеличение затрат труда на 1% – к росту выпуска на 0,933%.

в) Спрогнозируем объём производства при наименьших затратах ресурсов $K = 110,\ L = 110$.

$$\hat{Y} = 0{,}713 \cdot 110^{0{,}143} \cdot 110^{0{,}933} = 112{,}106$$

Вывод: Таким образом прогнозное значение объёма производства при заданных затратах ресурсов составит:

$$\hat{Y}(K = 110; L = 110) = 112{,}106.$$

Раздел II. Экономико-математические методы описания финансовых отношений на макро-и микроуровне

2.1. Многофакторные модели регрессии как инструмент оценки финансового и экономического потенциала

Множественная регрессия широко может широко применяться при решении проблем спроса, доходности финансовых инструментов, при изучении функции издержек производства, а также в макроэкономических расчетах.

Основная цель множественной регрессии - построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый результативный показатель [39].

Модель множественной регрессии имеет вид:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X_{1.} + a_2 \cdot X_2 + a_3 \cdot X_3 + ... + a_n \cdot X_n \qquad (13)$$

где $a_1,\ a_2, a_{3,...,}a_n$ - коэффициенты регрессии, показывающие на сколько единиц измерения увеличится (уменьшится) результативный показатель Y при условии, что соответствующие факторные показатели $X_1, X_2, X_3,..., X_n$ увеличатся ровно на 1 единицу измерения;

a_0 - свободный член, который не имеет самостоятельного экономического смысла.

Выбор факторных показателей осуществляется критериев статистической значимости, которые, в свою очередь, коррелируют с результативным показателем

Для оценки коэффициентов регрессии воспользуемся следующим алгоритмом.

1 шаг. Составляем матрицу M_1, заполняя ячейки на рабочем листе MS Excel следующими элементами:

$$\begin{pmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 & \sum X_3 & ... & \sum X_n \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 \cdot X_2 & \sum X_1 \cdot X_3 & ... & \sum X_1 \cdot X_n \\ \sum X_2 & \sum X_1 \cdot X_2 & \sum X_2^2 & \sum X_2 \cdot X_3 & ... & \sum X_2 \cdot X_n \\ \sum X_3 & \sum X_1 \cdot X_3 & \sum X_2 \cdot X_3 & \sum X_3^2 & ... & \sum X_3 \cdot X_n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \sum X_n & \sum X_1 \cdot X_n & \sum X_2 \cdot X_n & \sum X_3 \cdot X_n & ... & \sum X_n^2 \end{pmatrix} = M_1 \qquad (14)$$

2 шаг. Составляем матрицу M_2, заполняя ячейки на рабочем листе MS Y Excel следующими элементами:

$$\begin{pmatrix} \sum Y \\ \sum Y \cdot X_1 \\ \sum Y \cdot X_2 \\ \sum Y \cdot X_3 \\ \ldots \\ \sum Y \cdot X_n \end{pmatrix} = M_2 \qquad (15)$$

3 шаг. Выделяем на рабочем листе матрицу-столбец размерности $(n+1)\times 1$, состоящий из (n+1) строки и 1 столбца. Далее в строке формул делается запись:

=МУМНОЖ(МОБР(M_1);M_2) (16)

Одновременное сочетание клавиш ctrl+shift+enter позволит рассчитать одновременно все элементы матрицы размерности $(n+1)\times 1$ т.е. коэффициенты регрессии $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Эффективность использования финансового потенциала рассчитывается по формуле:

$$Э = \frac{У_{факт.}}{У_{расч.}} \cdot 100\% \qquad (17).$$

Теория наличия (отсутствия) резервов роста опирается на оценке эффективности.

Если $Э \succ 100\%$, говорят об отсутствии резервов роста результативного показателя, противном случае о наличии резервов роста.

Пример. Используя табличные данные (млн.руб.) построить многофакторную корреляционно-регрессионную модель. Оценить эффективность использования налогового потенциала по налогу на прибыль в динамике 2008-2012 гг. Сформулировать выводы.

Годы	Налог на прибыль, Y	ВРП, X_1	Прибыль прибыльных организаций, X_2
2008	39560,7	926 056,7	123253
2009	24636,9	885 064,0	148837
2010	37663,9	1 001 622,8	140791

Годы	Налог на прибыль, Y	ВРП, X_1	Прибыль прибыльных организаций, X_2
2011	48813	1 275 531,5	222187
2012	59525,5	1 368 593,3	255165

Анализ решения задачи.

Учитывая, что налог на прибыль изменяется по закону линейной зависимости $Y = a_0 + a_1 \cdot X_{1.} + a_2 \cdot X_2$

Используя метод наименьших квадратов, получим, что матрица M_1 примет вид:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5456868{,}3 & 890233 \\ 5456868{,}3 & 6{,}1442 \cdot 10^{12} & 1{,}0195 \cdot 10^{12} \\ 890233 & 1{,}0195 \cdot 10^{12} & 1{,}7164 \cdot 10^{11} \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 210200 \\ 2{,}3989 \cdot 10^{11} \\ 39880033626 \end{pmatrix}$$

Применяя операцию =МУМНОЖ(МОБР(M_1);M_2) получим, что матрица-столбец искомых коэффициентов равна $\begin{pmatrix} -40180{,}5 \\ 0{,}11 \\ -0{,}22 \end{pmatrix}$

Уравнение регрессии (оценка уравнения регрессии) примет вид:

$$Y = -40180{,}5 + 0{,}11 \cdot X_{1.} - 0{,}22 \cdot X_2$$

Эффективность использования налогового потенциала в динамике 2008-2012 гг. свидетельствует о наибольшем влиянии ВРП, по сравнению с прибылью прибыльных организаций. Из модели видно, что увеличение ВРП на 1 млн.руб. приведет к увеличению налога на прибыль на 0,11 млн.руб. Результат отрицательного значения коэффициента регрессии « - 0,22» может быть обоснован тем, что с 01.01.2010 ставка налога на прибыль организаций снизилась с 24% до 20%. Оценка эффективности использования налогового потенциала была рассчитана путем сопоставления фактических и рассчитанных показателей.

Заметим, что расчетные значения результативного показателя Y получаются путем подстановки в формулу следующим образом:

$$Y_{2008} = -40180{,}5 + 0{,}11 \cdot 926056{,}7 - 0{,}22 \cdot 123253 = 35636$$

$$Y_{2009} = -40180{,}5 + 0{,}11 \cdot 885064{,}0 - 0{,}22 \cdot 148837 = 25530$$

$$Y_{2010} = -40180{,}5 + 0{,}11 \cdot 1001622{,}8 - 0{,}22 \cdot 140791 = 40196$$

$$Y_{2011} = -40180{,}5 + 0{,}11 \cdot 1275531{,}5 - 0{,}22 \cdot 222187 = 52848$$

$$Y_{2012} = -40180{,}5 + 0{,}11 \cdot 1368593{,}3 - 0{,}22 \cdot 255165 = 55989$$

Годы	Y (фактический), налог на прибыль, млн.руб.	Y (расчетный), налог на прибыль, млн.руб.	Эффективность использования налогового потенциала, %
2008	39561	35636	111
2009	24637	25530	97
2010	37664	40196	94
2011	48813	52848	92
2012	59526	55989	106

2.2. Метод группового учёта аргумента для моделирования макроэкономических показателей

В некоторых случаях, когда методом наименьших квадратов не удается построить адекватную модель регрессии можно применить метод группового учета аргументов.

Автором метода группового учёта аргументов (МГУА) является А. Г. Ивахненко. МГУА применяется в самых различных областях, использующих структурную, параметрическую идентификацию и прогнозирование. Метод основан на рекурсивном селективном отборе моделей, на основе которых строятся более сложные модели.

Для современной экономики характерна нестабильность экономических отношений, неустойчивость денежно-кредитной системы и недостаточность законодательного регулирования. При этом известные балансовые модели, учитывающие внутри- и межотраслевые соотношения, на практике часто оказываются непригодными для планирования и управления экономическими процессами. В такой ситуации для анализа, моделирования и прогнозирования этих процессов целесообразно применять методы прямого построения моделей по данным наблюдений (статистики). Цель таких методов – выявление неявных причинно-следственных связей и закономерностей, скрытых в ретроспективных данных, и представление их в явной форме математических моделей. При этом необходимо искать как структуру, так и параметры моделей, т.е. решать задачу структурно-параметрической, или просто структурной, идентификации.

В экономической области, за годы исследований метод было удачно применен, например для:

- Идентификации процесса инфляции экономики Великобритании.

- Моделирование экономики Великобритании для восстановления основных управляющих закономерностей в системе.

- Анализа и прогноза показателей экономических процессов в Германии и Болгарии.

- Прогноза и оценки главных действующих факторов в экономике США.

- Оптимизации по сценарию «если-то» и нормативного прогнозирования курса доллара в период Персидского нефтяного кризиса.

- Прогнозирование индексов биржевого рынка в Нью-Йорке.

- Оптимизации индексов мировой динамики.

- Оптимизации портфеля акций на Франкфуртской бирже.

- Нормативного прогнозирования процессов в макроэкономике Украины.

Большинство алгоритмов МГУА используют полиномиальную базисную функцию. Общая связь между входными и выходными переменными может быть выражен в виде функционального ряда Вольтерра, дискретным аналогом которого есть полином Колмогорова-Габора:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{M} a_i x_i + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} a_{ijk} x_i x_j x_k \qquad (18)$$

где $X(x_1, x_2, ..., x_M)$ - входной вектор переменных;

$A(a_1, a_2, ..., a_M)$ - вектор коэффициентов или весов.

Опишем этапы реализации метода.

1. Выбирается общий вид перебираемых моделей, так называемые опорные функции. Чаще используются зависимости вида:

$$y = a_0 + a \cdot x_i \cdot x_j,$$

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_j,$$

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_j + a_3 \cdot x_i \cdot x_j,$$

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_j + a_3 \cdot x_i^2 + a_4 \cdot x_j^2 + a_5 \cdot x_i \cdot x_j.$$

2. Используя опорные функции, строятся различные варианты моделей для некоторых или всех аргументов. Например, строятся полиномы с одной переменной, полиномы со всевозможными парами переменных, полиномы со всевозможными тройками переменных, и т. д, полином со всеми переменными. Для каждой модели определяются её коэффициенты методами регрессионного анализа.

3. Среди всех моделей выбираются несколько (от 2 до 10) наилучших. Качество моделей определяется коэффициентом детерминации, или среднеквадратическим отклонением ошибки, или другие внешние критерии.

4. Если найдена достаточно «хорошая» модель или достигнута максимально допустимая сложность моделей, то алгоритм заканчивается.

5. Иначе, найденные на 3-ем шаге модели используются как аргументы для опорных функций следующего этапа итерации (переход на 2-ой пункт). То есть уже найденные модели участвуют в формировании более сложных взаимосвязей.

Обычно степень полинома опорной функции выбирается не выше $N-1$, где N - количество точек выборки. Часто бывает достаточно использовать в качестве опорных функции полиномы второй степени. В таком случае на каждом шаге итерации степень результирующего полинома удваивается.

Часто исходную выборку разбивают на две подвыборки A и B. Подвыборка A используется для определения коэффициентов модели, а подвыборка B - для определения качества (коэффициента детерминации или среднеквадратического отклонения). При этом соотношение количества данных в обеих выборках зависит от теоретических предпосылок.

Статистика показывает, что с каждым шагом итерации уменьшается среднеквадратическое отклонение. Но после достижения определенного уровня сложности (зависит от характера и количества данных, а также общего вида модели), СКО начинает расти.

В следующем примере предпринята попытка моделирования индекса потребительских цен Y в зависимости от значений 15 макроэкономических показателей: X_1- индекс выпуска товаров и услуг по базовым видам экономической деятельности; X_2- индекс промышленного производства; X_3 - индекс производства продукции сельского хозяйства; X_4 - грузооборот транспорта; X_5 - инвестиции в основной капитал; X_6- оборот розничной торговли; X_7 - индекс цен производителей промышленных товаров в процентах к декабрю предыдущего года; X_8 - общий уровень безработицы (по методологии МОТ), в процентах к экономически активному населению, на конец периода; X_9 - реальные располагаемые денежные доходы; X_{10} - расходы на покупку товаров и услуг; X_{11} - цена на нефть сорта "Юралс" (в долларах США за баррель); X_{12} - экспорт товаров (в млрд. долларах США); X_{13} - импорт товаров (в млрд. долларах США); X_{14} - официальный курс рубля к доллару США на конец периода; X_{15} - ставка рефинансирования центрального банка России. В работе использованы статистические данные по месяцам с января 2007 года по декабрь 2012 года.

Первоначально построенная модель множественной линейной регрессии была использована в итерациях метода группового учёта аргумента.

Через Y_1 обозначены теоретические значения ИПЦ, полученные из первой модели. Было построено ещё четыре модели:

$$Y_2 = 388{,}1 - 109{,}06 \cdot Y_1 + 1{,}04 \cdot Y_1^2 - 0{,}003 \cdot Y_1^3,$$

$$Y_3 = 13{,}53 + 0{,}86 \cdot Y_1 + 0{,}32 \cdot t - 0{,}02 \cdot t_1^2 - 0{,}0003 \cdot t_1^3,$$

$$Y_4 = 0{,}9 \cdot Y_1 + 0{,}74 \cdot Y_2 - 0{,}64 \cdot Y_3,$$

где t – номер месяца. Значения переменной Y_5 получены из значений переменной Y_4 с помощью метода скользящей средней:

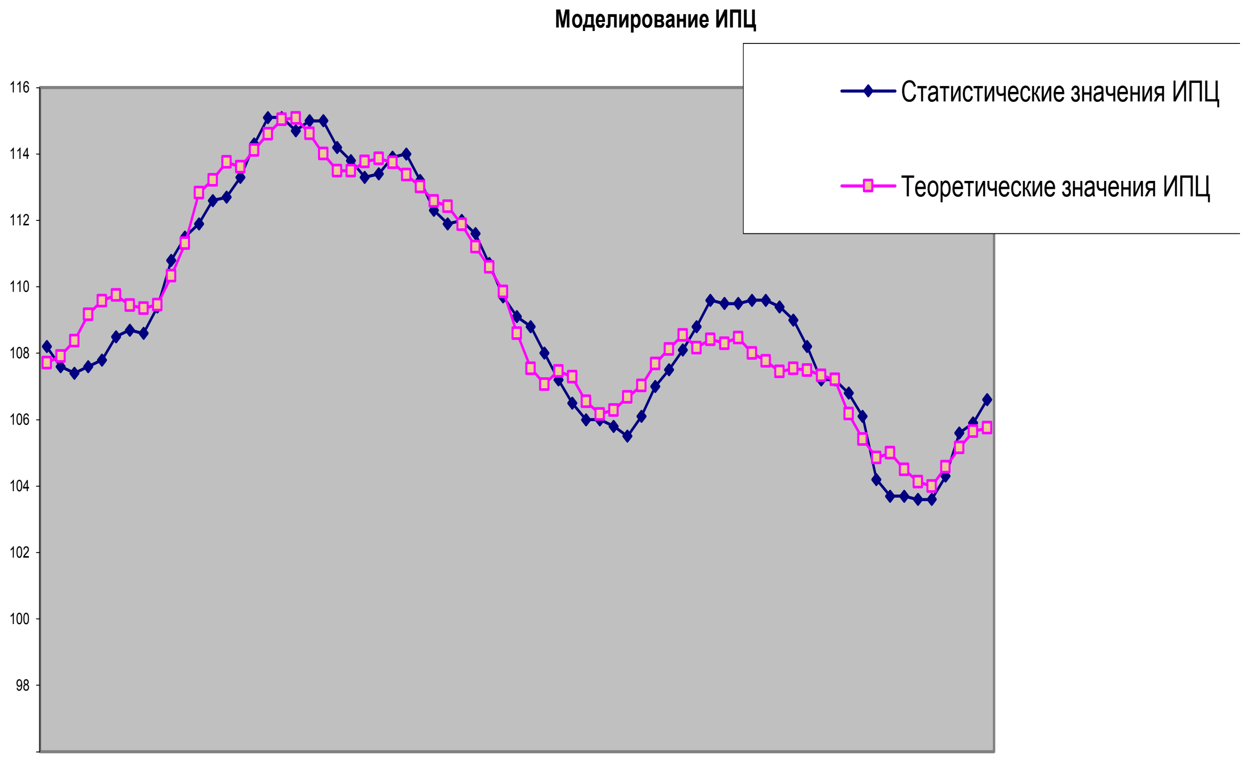


Рис. 9. Моделирование индекса потребительских цен

Из рисунка 9 видно, что для описания индекса потребительских цен найдено уравнение достаточно хорошо аппроксимирующее статистические значения показателя.

Следующие итерации метода группового учёта аргументов позволяют повысить качество построенной модели, уменьшить расхождение между статистическими и теоретическими данными, но ещё больше усложняют экономическую интерпретацию.

2.3. Оценка инвестиционной привлекательности проектов

Чистый приведенный доход

При оценке инвестиционных проектов используется метод расчета чистого приведенного дохода, который предусматривает дисконтирование денежных потоков: все доходы и затраты приводятся к одному моменту времени.

Центральным показателем в рассматриваемом методе является показатель чистого приведенного дохода NPV (net present value) – текущая стоимость денежных потоков за вычетом текущей стоимости денежных оттоков.

Это обобщенный конечный результат инвестиционной деятельности в абсолютном измерении.

При разовой стартовой инвестиции расчет чистого приведенного дохода можно представить следующим выражением:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} - IC \qquad (19)$$

где IC – стартовые инвестиции;
i – ставка дисконтирования.
R_k – годовые денежные поступления в течение n лет,
$k = 1, 2, \ldots, n$ – моменты времени.

Важным моментом является выбор ставки дисконтирования, которая должна отражать ожидаемый усредненный уровень ссудного процента на финансовом рынке.

В общем случае ставка дисконтирования субъективна, зависит от рисков, ожиданий инвестора, альтернативных возможностей и др. Можно сказать, что ставка дисконтирования – это общая ставка дохода, которую инвестор ожидает от своей доли участия в данном конкретном инвестиционном проекте.

Для определения эффективности инвестиционного проекта отдельной фирмой в качестве ставки дисконтирования используется средневзвешенная цена капитала, используемого фирмой для финансирования данного инвестиционного проекта.

Если проект предполагает не разовую инвестицию, а последовательное инвестирование финансовых ресурсов в течение нескольких (m) лет, то формула для расчета очевидным образом модифицируется:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{IC_j}{(1+i)^j} + IC_0 \qquad (20)$$

Показатель NPV является абсолютным приростом, поскольку оценивает, на сколько приведенный доход перекрывает приведенные затраты:

- при $NPV > 0$ проект следует принять (приносит прибыль);
- при $NPV < 0$ проект не принимается (убыточен),
- при $NPV = 0$ проект не имеет ни прибыли, ни убытков.

Необходимо отметить, что показатель NPV отражает прогнозную оценку изменения экономического потенциала фирмы в случае принятия данного проекта.

Одно из важных свойств данного критерия в том, что показатель NPV различных проектов можно суммировать, поскольку он аддитивен во времени. Это позволяет использовать его при анализе оптимальности инвестиционного портфеля.

Пример.

Фирма рассматривает целесообразность инвестиционного проекта, стоимость которого составляет 210 тыс. долларов.

По прогнозам ежегодные поступления составят 55 тыс. долларов.

Проект рассчитан на 5 лет.

Необходимая норма прибыли составляет 8%.

Следует ли принять этот проект?

Решение:

Чистая стоимость проекта (чистый приведенный доход) равна:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} - IC_0 = \frac{55000}{1{,}08^5} + \frac{55000}{1{,}08^4} + \frac{55000}{1{,}08^3} + \frac{55000}{1{,}08^2} + \frac{55000}{1{,}08} - 210000 = -5735$$

Поскольку величина чистой текущей стоимости проекта оказалась равна –5735 долларов, т.е. $NPV < 0$, то проект должен быть отвергнут.

Как правило, основываются на том, что величина NPV находится на начало реализации инвестиционного проекта (чистая текущая стоимость проекта). Однако можно определять эту величину на момент завершения процесса вложений или на иной момент времени.

Несмотря на изменение абсолютного результата, знак данной величины не меняется от изменения момента приведения. Следовательно, вывод о принятии проекта не зависит от момента приведения.

Часто возникают ситуации оценки инвестиционного проекта, который, начиная с некоторого момента времени n_0, будет приносить постоянный доход $R_k = R$ или доход с постоянным темпом роста h: $R_k = K(1+h)^k$ (инвестиции в предприятия, торговлю и т.п.). В этом случае имеет место инвестиционный проект с бесконечным периодом получения доходов. Обобщая формулу для чистого приведенного дохода на бесконечное количество моментов времени, получим:

$$NPV = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R \cdot (1+h)^k}{(1+i)^k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{IC_j}{(1+i)^j} - IC_0$$

Если ставка дисконтирования больше, чем темп роста дохода ($i > h$), то бесконечную сумму можно выразить по формуле для бесконечной геометрической прогрессии с убывающими членами:

$$NPV = R \cdot \left(\frac{1+h}{1+i}\right)^{n_0} \cdot \frac{(1+i)}{(i-h)} - \sum_{j=1}^{m} \frac{IC_j}{(1+i)^j} - IC_0$$

Для постоянного дохода R формулы справедливы при $h = 0$.

Пример.

Инвестор рассматривает целесообразность вложения 150 млн. руб. в покупку магазина, который приносит доход 10 млн. руб. в год и этот доход растет наравне с инфляцией с темпом роста 8% в год. Необходимая норма прибыли инвестора составляет 15%.

Следует ли принять этот проект?

Решение:

Заметим, что в этом случае период начала поступления дохода $n_0 = 1$, а инвестиции вкладываются лишь однократно и равны сумме покупки.

Так как $i = 0{,}15 > h = 0{,}08$, то можно воспользоваться формулой для чистого приведенного дохода на бесконечном количестве периодов.

$$NPV = R \cdot \left(\frac{1+h}{1+i}\right)^{n_0} \cdot \frac{(1+i)}{(i-h)} - IC_0 = 10 \cdot \left(\frac{1+0{,}08}{1+0{,}15}\right) \cdot \frac{(1+0{,}15)}{(0{,}15-0{,}08)} - 150 \approx 4{,}29 \text{ млн.руб.}$$

Чистый приведенный доход от объекта вложения положителен, следовательно проект рекомендуется принять.

Если ожидаемый темп роста доходов не ниже ставки дисконтирования ($i \le h$), то такой проект, очевидно, является выгодным, а чистый приведенный доход по нему равен бесконечности.

Срок окупаемости

Для анализа инвестиций применяют и такой показатель, как срок (период) окупаемости (payback period method) – продолжительность времени, в течение которого дисконтированные на момент завершения инвестиций прогнозируемые денежные поступления равны сумме инвестиций. В этом случае, очевидно, что $NPV = 0$ и получаем:

$$\sum_{k=1}^{t_{ok}} \frac{R_k}{(1+i)^k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{IC_j}{(1+i)^j} + IC_0 \qquad (21)$$

Иными словами срок окупаемости $t_{\text{ок}}$ – это количество лет, необходимых для возмещения стартовых инвестиций.

В общем случае срок окупаемости равен не целому числу лет и его точное определение для произвольных платежей математически невозможно. Для оценки пользуются упрощенными формулами.

Самым грубым образом срок окупаемости определяется как год окупаемости: $t_{\text{ок}} = n_{\text{ок}}$ – первый год, для которого накопленный дисконтированный денежный поток (NPV, вычисленный без учета последующих доходов) становится неотрицательным:

$$\sum_{k=1}^{n_{ok}} \frac{R_k}{(1+i)^k} \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{IC_j}{(1+i)_j} + IC_0 \qquad (22)$$

Более точно период окупаемости определяется по следующей формуле:

$$t_{ok} = (n_{ok} - 1) + \frac{PV(\Delta n_{ok})}{PV(Rn_{ok})} \qquad (23)$$

где $\left(n_{\text{ок}} - 1\right)$ – число лет до года окупаемости;

$PV\left(\Delta_{n_{\text{ок}}}\right)$ – дисконтированная не возмещенная стоимость на начало года окупаемости;

$PV\left(R_{n_{\text{ок}}}\right)$ – дисконтированный доход в течение года окупаемости.

Данный показатель определяет срок, в течение которого инвестиции будут «заморожены», поскольку реальный доход от инвестиционного проекта начнет поступать только по истечении периода окупаемости.

Пример.

Рассчитать срок окупаемости проекта, для которого размер инвестиций составляет 1 млн руб., а денежные поступления в течение 5 лет будут составлять: 200; 500; 600; 800; 900 тыс. руб. соответственно.

Ставка дисконтирования 15%.

Решение:

Рассчитаем дисконтированный денежный поток:

Период	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Денежный поток	–1000	200	500	600	800	900
Дисконтированный денежный поток	–1000	174	378	394	458	447
Накопленный дисконтированный денежный поток	–1000	–826	–448	–54	404	851

Год окупаемости проекта $n_{\text{ок}}$ равен 4.

Дисконтированная не возмещенная стоимость на начало года окупаемости равна $PV(\Delta n_{ok}) = 54.$.

Дисконтированный доход в течение года окупаемости $PV(Rn_{ok}) = 458.$

Тогда срок окупаемости проекта равен:

$$t_{ok} = (n_{ok} - 1) + \frac{PV(\Delta n_{ok})}{PV(Rn_{ok})} = (4 - 1) + \frac{54}{458} = 3{,}12$$

Таким образом, период, реально необходимый для возмещения инвестированной сумы, составит 3,12 года или 3 года и 44 дня.

Если доходы можно представить в виде аннуитета ($R_k = R$), то

$$t_{ok} = \frac{-\ln(1 - \frac{IC}{R} \cdot i}{\ln(1 + i)} \qquad (24)$$

Не всякий поток доходов способен привести к окупаемости проекта. Срок окупаемости существует, если не нарушаются определенные соотношения между поступлениями и размером инвестиций.

При ежегодных постоянных поступлениях это соотношение имеет вид:

$$R \succ IC \cdot i$$

Внутренняя норма доходности

При анализе эффективности инвестиционных проектов широко используется показатель внутренней нормы доходности IRR (internal rate of return) – это ставка дисконтирования, приравнивающая сумму приведенных доходов от инвестиционного проекта к величине инвестиций, т.е. ставка, для которой вложения окупаются, но не приносят прибыль.

Величина этой ставки полностью определяется «внутренними» условиями, характеризующими инвестиционный проект – суммами инвестиций и ожидаемого дохода:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1 + IRR)^k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{IC_j}{(1 + IRR)^j} - IC_0 = 0 \qquad (25)$$

Прямое аналитическое выражение нормы доходности из этой формулы, как правило, невозможно. Для определения IRR в таком случае используют итерационные вычислительные алгоритмы или метод подбора.

Существенного облегчения расчетов можно достичь, если сформировать значение NPV в MS Excel по приведенной формуле в зависимости от ячейки с подбираемым значением IRR. После этого искомое значение IRR можно определить не только с помощью подбора, но и автоматически с применением надстройки «Поиск решения».

Для неограниченного количества доходов с постоянным темпом роста $R_k = R \cdot (1 + h)^k$ и единой суммы инвестиций IC_0 норма доходности может быть определена аналитически:

$$IRR = \frac{R}{IC} \cdot (1 + h) + h \qquad (26)$$

После определения нормы доходности инвестор сравнивает полученное значение IRR со ставкой привлеченных финансовых ресурсов CC (Cost of Capital):

- если $IRR \succ CC$, то проект можно принять;
- если $IRR \prec CC$, то проект отвергается;
- если $IRR = CC$, то проект имеет нулевую прибыль.

Пример.

Рассчитать внутреннюю ставку доходности по проекту, где затраты составляют 1200 тыс. руб., а доходы в последующие годы равны 50; 200; 450; 500 и 600 тыс. руб.

Решение:

Сформируем в MS Excel таблицу доходов и их дисконтированных величин по некоторой ставке, которую будем вводить в ячейку B1. Сумма дисконтированных доходов будет равна NPV. Таблица и соответствующие формулы приведены на рисунке.

	A	B	C
1	IRR	0.2	
2			
3	Годы	Доходы	Дисконт
4	0	-1200	-1200
5	1	50	41.667
6	2	200	138.89
7	3	450	260.42
8	4	500	241.13
9	5	600	241.13
10	**NPV**		**-276.77**

	A	B	C
1	IRR	0.2	
2			
3	Годы	Доходы	Дисконт
4	0	-1200	=B4/(1+$B$1)^A4
5	1	50	=B5/(1+$B$1)^A5
6	2	200	=B6/(1+$B$1)^A6
7	3	450	=B7/(1+$B$1)^A7
8	4	500	=B8/(1+$B$1)^A8
9	5	600	=B9/(1+$B$1)^A9
10	**NPV**		**=СУММ(C4:C9)**

Рис.10. Таблицы в MS Excel для определения нормы доходности

Как видим, при ставке *i=20%*, $NPV \prec 0$. Для увеличения NPV ставка должна уменьшаться. Используя надстройку MS Excel поиск решения можно получить значение $IRR = 11{,}55\%$ при котором NPV практически равно нулю (см. рис.11).

	A	B	C
1	IRR	0.1155	
2			
3	Годы	Доходы	Дисконт
4	0	-1200	-1200
5	1	50	44.823
6	2	200	160.73
7	3	450	324.19
8	4	500	322.92
9	5	600	347.38
10	**NPV**		**0.0403**

Рис.11. Итоговая таблица с определенной нормой прибыли

Таким образом, ставка 11,55% является верхним пределом процентной ставки, по которой фирма может окупить кредит для финансирования инвестиционного проекта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном методическом пособии были представлены теоретические и методические аспекты по применению экономико-статистических и экономико-математических методов по управлению финансовыми отношениями на микро- и макроуровне. Основой построения теоретических основ послужили дисциплины «Финансовый менеджмент», «Финансовая математика», «Статистика», «Эконометрика».

В заключение отметим, что многие финансовые расчеты могут быть выполнены в широко распространенном пакете Excel.

В первом разделе были рассмотрены такие вопросы как оценка показателей вариации в управлении финансовыми рисками, коэффициенты эластичности и корреляции как оценка характера взаимосвязи финансовых показателей, построение трендовых моделей динамики финансовых показателей, экстраполяция ряда динамики финансовых показателей, построение моделей нелинейной регрессии.

Во втором разделе освещаются вопросы построения многофакторных моделей регрессии в оценке финансового и экономического потенциала на микро- и макроуровне, особенности прогнозирования показателей, применения метода группового учёта аргумента для моделирования макроэкономических показателей, оценки инвестиционной привлекательности проектов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Рекомендуемая литература:

1. Бабешко, Л. О. Математическое моделирование финансовой деятельности: учеб. пособие / Л. О. Бабешко ; Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации. – М.: КНОРУС, 2009. – 224с.
2. Балдин, К. В. Общая теория статистики [Электронный ресурс]: учеб. пособие / К. В. Балдин, А. В. Рукосуев. – 2-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К°", 2012. – 312 с. – Режим доступа: http://znanium.com
3. Басовский, Л. Е. Финансовый менеджмент [Электронный ресурс]: учебник / Л. Е. Басовский. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 240 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com
4. Бланк, И. А. Основы финансового менеджмента: в 2-х т. Т.1 / И. А. Бланк. – 3-е изд. – Киев: Эльга, Ника-Центр, 2007. – 624с. : схемы, табл.
5. Бородич, С. А. Эконометрика. Практикум [Электронный ресурс]: учеб. пособие / С. А. Бородич. – М.: НИЦ ИНФРА-М; Минск: Нов. знание, 2014. – 329 с.: ил. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com
6. Бородич, С. А. Эконометрика: учеб. пособие / С. А. Бородич. – 2 изд., испр. – Минск: Новое знание, 2004. – 416 с. – (Экономич. образов.).
7. Брусов, П. Н. Финансовая математика [Электронный ресурс]: учеб. пособие для магистров / П. Н. Брусов, Т. В. Филатова. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 480 с. – (Высшее образование: Магистратура). – Режим доступа: http://znanium.com
8. Годин, А. М. Статистика [Электронный ресурс]: учебник / А. М. Годин. – 10-е изд., перераб. и испр. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К°", 2013. – 452 с. – Режим доступа: http://znanium.com
9. Дайитбегов, Д. М. Компьютерные технологии анализа данных в эконометрике [Электронный ресурс]: монография / Д. М. Дайитбегов. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Вузовский учебник: НИЦ Инфра-М, 2013. – XIV, 587 с. – (Научная книга). – Режим доступа: http://znanium.com
10. Ефимова, М. Р. Финансово-экономические расчеты: пособие для менеджеров [Электронный ресурс]: учеб. пособие / М. Р. Ефимова. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 185 с. – Режим доступа: http://znanium.com
11. Зигангирова, А. М. Статистика финансов и кредита: метод. указания и практ. задания / А. М. Зигангирова; Институт экономики, управления и права (г. Казань), Кафедра "Высшей математики". – Казань: Познание, 2009. – 63с.
12. Зигангирова, А. М. Статистика. Методические указания и контрольные

задания для студентов заочной формы обучения: учеб.-метод. пособие / А. М. Зигангирова. – Казань: Познание, 2008. – 91с.
13. Зигангирова, А. М. Статистика: метод. пособие: Ч. 2 [для спец–сти 061500 "Маркетинг"] / А. М. Зигангирова. – Казань: Познание, 2008. – 59с.
14. Кадочникова, Е. И. Эконометрика: метод. пособие для практических занятий и самостоятельной работы / Е. И. Кадочникова ; Институт экономики, управления и права (г. Казань), Кафедра "высшей математики". – Казань: Познание, 2009. – 58с.
15. Капитоненко, В. В. Задачи и тесты по финансовой математике: учеб. пособие / В. В. Капитоненко. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 256 с. : ил.
16. Ковалев, В. В. Финансовый менеджмент: теория и практика / В. В. Ковалев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2010. – 1024с. : ил.
17. Колемаев, В. А. Эконометрика: учебник / В. А. Колемаев; Министерство образования РФ; Государственный университет управления. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 160с. – (Серия "Высшее образование").
18. Копнова, Е. Д. Основы финансовой математики [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Е. Д. Копнова. – М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2012. – 232с. – (Университетская серия). – Режим доступа: http://znanium.com
19. Костромин, А. В. Эконометрика: курс лекций / А. В. Костромин. – Казань: Изд-во ИЭУП, 2004. – 136с.
20. Красс, М. С. Математика для экономического бакалавриата [Электронный ресурс]: учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 472 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com
21. Кремер, Н. Ш. Эконометрика: учебник / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко; под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 311с.
22. Кремер, Н. Ш. Эконометрика: учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко; под ред. Н. Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 311с.
23. Магнус, Я. Р. Эконометрика. Начальный курс: учебник / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. – 6-е изд., перераб. и доп. – М. : Дело, 2004. – 576 с.
24. Математические методы и модели исследования операций: учебник / под ред. В. А. Колемаева. – М.: ЮНИТИ - ДАНА, 2009. – 592с.: табл., схемы.
25. Новиков, А. И. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. И. Новиков. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 272 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com
26. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И. В.

Орлова, В. А. Половников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2014. – 389 с. – Режим доступа: http://znanium.com
27. Современный экономический словарь / Б.А. Райзберг, Л.Ш. Лозовский, Е.Б. Стародубцева - 2-е изд., испр. М.: ИНФРА-М, 1999. – 478 с.
28. Статистика: учебник / И. И. Елисеева [и др.]; Санкт-Петербурский государственный университет экономики и финансов; под ред. И. И. Елисеевой. – М.: Изд-во Юрайт : ИД Юрайт, 2011. – 565 с. : ил. – (Основы наук).
29. Статистика: учебник / Л. П. Харченко [и др.]; под ред. В. Г. Ионина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2008. – 445 с. – (Высшее образование).
30. Уткин, В. Б. Эконометрика [Электронный ресурс]: учебник / К. В. Балдин [и др.]; под ред. В. Б. Уткина. – 2-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. – 564 с. – Режим доступа: http://znanium.com
31. Финансовый менеджмент [Электронный ресурс]: учебник / под ред. А. М. Ковалевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : НИЦ Инфра-М, 2013. – 336 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com
32. Чуйко, А. С. Финансовая математика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 160 с. ил. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com
33. Чупрунов, А. Н. Эконометрика: краткий курс / А. Н. Чупрунов; Институт экономики, управления и права (г. Казань), Экономический факультет, Кафедра высшей математики. – Казань: Познание, 2010. – 60с.
34. Эконометрика: учебник для магистров / И. И. Елисеева [и др.]; Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов; под ред. И. И. Елисеевой. – М. Изд-во Юрайт, 2012. – 453с. : ил., табл.
35. Экономико-математические методы в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. Н. Гармаш [и др.]; под ред. А. Н. Гармаша. – М.: Вуз. учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 416с. – Режим доступа: http://znanium.com
36. Экономическая информатика: учеб. пособие / под ред. Д. В. Чистова. – М.: КНОРУС, 2010. – 512с. : ил.
37. Яновский, Л. П. Введение в эконометрику: учеб. пособие / Л. П. Яновский, А. Г. Буховец ; под ред. Л. П. Яновского. – 2-е изд., доп. – М.: КНОРУС, 2007. – 256 с.: граф., табл.

Рекомендуемые Интернет-сайты:

38. http://forexaw.com – сайт о Валютном рынке (аналитика форекс)

39. http://www.bibliotekar.ru/economicheskaya-statistika-2/18.htm - сайт о библиотеке экономической статистики

40. http://economy-ru.com/natsionalnaya-ekonomika-regionalnaya/332-matematicheskie-modeli-25402.html - сайт о математических моделях прогнозирования

41. http://www.coolreferat.com – сайт о базе рефератов

42. www.wikipedia.ru – сайт о свободной энциклопедии